620. Hilbert 空間ニ於ケル Linear translatable functional equation (IV)

北川　敏男（阪大）

〔概要〕 (I)ニ於テハ問題ノ起リヲ述べ，ソレニ對スル一ツノ結果ヲ述べタ。(II)ニ於テ、問題ニ對シテ特殊化ヲ施シ，特殊化3ヲ得タ。(III)ニ於テハ，(I)−(II)ノ議論トハ別ニ，Banach空間値函數ノCauchy展開ヲノベタ。(IV)即チIV部ニ於テハ，特殊化3ニ對シテ、コノCauchy級數論ヲ適用スルコトニヨリ、特殊化3ニ於ケル解ガBochnerノ意味デalmost periodicデアルコトヲ示サウ。コレニヨツテ、吾々ノ結果ニ對スル証明ハ完了スル。(但シ，吾々ハ $G(\lambda)\equiv e^{\lambda}$ ノ場合ニツイテ述べタニ止マルノデアルガ。)

III. 定理ノ証明ノ完了

9. III部ニ引續キ更ニ次ノ補助定理ヲ準備シヤウ。

補助定理 9.1. $K(x)$ ヲ numerical-valued ナ函數トシ，$(0,\infty)$ デ differentiable トシ，$1\leqq x<\infty$ ニ對シテ $|x^2K(x)|<H$ トナルヤウナ常數 H ガ存在スルトスル。$f(x)\in(F)$ デアリ、コレニ對シテ常數 G ガアツテ

$$\frac{1}{x}\int_0^x\|f(\xi)\|\,d\xi\leqq G\qquad(0<x<\infty\ ニ對シテ)$$

トナツテヰルトスル。然ルトキニハ，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f\left(\frac{x}{n}\right)K(x)\,dx=f(+0)\int_0^\infty K(x)\,dx$$

証明： *Numerically valued* ナ $f(x)$ ニ関スル *Bochner* ノ定理ノ証明ハ，上ノ如ク *Banach* 空間値函数 $f(x)$ ニ對シテモソノマヽアテハマル。（*S. Bochner; Vorlesungen über Fouriersche Integrale* (1932) §9 *Die Wienersche Formel* ヲ參照セラレヨ）

補助定理 9.2. $f(t)$ ε (F) デアリ、$-\infty<t<\infty$ ニ於テ (F) ノ *topology* ニテ *bounded and uniformly continuous* トスル。

$$K_n(\xi)=\frac{1}{C}\,\frac{(\sin\rho_n\xi)^4}{\rho_n^3\,\xi^4}\qquad\left(C=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^4 d\xi\right)$$

トスル。然ルトキニハ，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\xi)\,K_n(\xi)\,d\xi$$

ハ $n\to\infty$ ノトキ，一様ニ $f(t)$ ニ *tend* スル。

証明： 前補助定理並ビニ $[B_2]$ ヲ參照セラレヨ。

8. §5—7マデノ事柄ヲ、吾々ノ問題ニ利用スル。

補助定理 10. "特殊化 3 ノモトニ於テ

$$\varphi_n(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t+\xi,x)\,K_n(\xi)\,d\xi$$

$$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

トオケバ，スベテノ (t,x) —— 但シ measure 0 ノ t-set T' ヲノゾキ，又 T' ニ属セヌ t ニツイテハ measure 0 ノ x-set ヲノゾク —— ニツイテ、

$$\Lambda\varphi_n(t,x)=0$$

且ツ各 n ニツイテ $\varphi_n(t,x)$ ハ一様ニ連続 $(-\infty<t<\infty$ デ) デアリ、$\Phi_n:\{\varphi_n(t,x)\}\ -\infty<t<\infty$ ナル集合ハ L^2_M ニ於テ L^2_M ノ strong topology デ，compact set ヲ形成スル。”

証明：　前半ハ，

$$\Lambda\varphi_n(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda_\xi\{\varphi(t+\xi,x)\}K_n(\xi)\,d\xi$$

トイフコトカラ示サレル。後半ハ補助定理 5. 1—2 ヲ用フレバ明テカ。

補助定理 11.　特殊化 3 ノモトニ於テハ generating function $G(\lambda)$ ハ適當ニエランダ常数 a,b ニ對シテ補助定理 8. 1 ノ假定ヲ満足スル。

証明：　コレハ〔T〕Chapter I，§4 ノ定理 IV, I カラスグニ得ラレルコトデアル。同論文ヲ参照シテ戴キタイ。

補助定理 12.　“補助定理 10 ト同ジ假定ノモトニ於テ、スベテノ (t,x) —— 但シ measure 0 ノ t-set T'' ヲノゾキ，又 T'' ニ属セヌ t ニツイテ、measure 0 ノ x-set ヲノゾキ ——

$$\varphi_n(t,x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)e^{i\beta_\nu t} \qquad (n=0,1,2,3,\cdots\cdots)$$

ナル関係ガアル。"

__証明:__ __補助定理 5.2__ ニ由ッテ $r \geqq n$ ナラバ常ニ

$$S_{\mathfrak{C}_r}(t,0;\varphi_n)=\int_{-\infty}^{\infty}K_r(\sigma)S_{\mathfrak{C}_r}(t+\sigma;0;\varphi_n)d\sigma$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)e^{i\beta_\nu t}$$

トナル。補助定理 11 及ビ補助定理 8.1 ニヨッテ

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}S_{\mathfrak{C}_r}(t,0;\varphi_n)=\varphi_n(t,x)$$

ナル関係ガスベテノ (t,x) —— 但シ, measure 0 ノ t-set T'' ヲノゾキ, 又 T'' ニ属セヌ t ニツイテハ measure 0 ノ x-set ヲノゾク —— ニツイテ成立スル。ヨッテ、同様ノ意味デ

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_n(x)e^{i\beta_\nu t}=\varphi_n(t,x)$$

9. 吾々ノ定理ノ証明ハ次ノ補助定理ニヨッテ完結スル。

__補助定理 13.__ 特殊化 3 ノモトニ於イテ、$\varphi(t,x)$ ハ L^2_M ノ strong topology ニテ almost periodic デアル。

__証明:__ __補助定理 10__ ニ於ケルガ如ク approximating components トモイフベキ $\{\varphi_n(t,x)\}$ ヲ

ツクル。

$\{\varphi_n(t,x)\}$ ノ各 $\varphi_n(t,x)$ ハ補助定理 12 カラミラレル如ク、L^2_M ニテ almost periodic デアル、シカルニ、補助定理 10 ニヨッテ $-\infty<t<\infty$ ニテ一様ニ $\varphi(t,x)$ ニ收斂スルノデアルカラシテ、良ク知ラレタ定理ニヨリ、$\varphi(t,x)$ 又 L^2_M ノ strong topology ニテ almost periodic デナケレバナラヌ。　(以上)

IV. 附　言

10. 以上ハ $G(\lambda)\equiv e^{\lambda}$ ナル場合ニツイテ述ベタノデアルが、第138号(II)ノ始メニ述ベタ場合ニツイテモ同様ニ論ゼラレルコトハ (i) §6 ノ x ニ於ケル λ-spectrum $\sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(x)\left(G(\lambda)\right)^\nu=0$ ノ根ノ分布が, Langer ノ exponential sum ノ zero-points ノ分布ニ関スル研究カラ知ラレルノデ、特殊化 1—3 ニ相當シタ特殊化ヲ見出セルコト (ii) (II) ニ於ケル (F) ニ於ケル Linear translatable operation ノ議論がツカヘル。(iii) 特ニ、定理 8.1 ニ於ケル convergence-theorem ノ條件がミタサレテキル —— 以上三ツノ理由カラ見當ヘツク。

(i), (ii), (iii) ノウチ、(i) ヲ細カク述ベルコトハ長クナルノデヤメタワケデアル。(ii), (iii) ノ事柄ニツイテハ，本文デノベタ $G(\lambda)\equiv e^{\lambda}$ ノ場合ニシカ用ヰナイノデハヤヽ道具立テがコトサララシイ感ジがスルノデ一般ノ場合ニ至ッテソノ

效果ガ見ラレルヤウニ思ハレルガ、コヽデ仔細ヲノベルコトハ避ケタイ。

11. *Bochner-Neumann* ノ問題ハ、*Muckenhoupt* ノ論ジタ振動弦ノ問題ヤ波動方程式ノ問題ニ *origin* ヲモチ、ソレ故ニコソ彼等ハ *operational-differential equation* ヲ論ジタワケデアロウ。シカシ、茲デハ数学トシテノ興味，（特ニ *linear translatable operation* トシテノ）カラ以上ノヤウナ議論ヲ試ミタワケデアル。

(校正) 主ナルモノノミニ限リマスガ、(II)デ補助定理5ガ二ツアリマスガ、始メハ，5.1，次ハ5.2デアリマス。(III)ニ於テ $\boxed{\text{評價定理}}$ ノ証明ノトコロニ t, x_0 ナドトアルノハスベテ t_0 デアリマス.